Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2005

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR—Segundo parcial, 2005 —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Debe resolver cuatro, cualesquiera de los cinco ejercicios.

1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule su polinomio característico
   b) Encuentre sus autovalores y autovectores
   c) ¿Cuál es el polinomio minimal de A?
   d) ¿Es A diagonalizable?

2. Sean u, v vectores ortonormales en un espacio vectorial E con producto interno $< , >$.

   a) Demuestre que para cada $x \in E$,

$$\|x\|^2 \geq |<x\,,\,u>|^2 + |<x\,,v\;>|^2 \qquad (*)$$

   b) Además demuestre que en (*) vale la igualdad si y solo si x es una combinación lineal de u y v.

3. Sea Π el plano de ecuación

$$\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 1 \text{ en } \mathbb{R}^3 \text{ y sea } P \text{ el punto } P = (1,\,1,\,1),$$

   a) ¿Hay un punto $Q \in \Pi$ tal que $d(P,\,Q) \leq d(P,\,Q')$ para cada $Q' \in \Pi$? ¿Cuántos tales puntos Q hay?
   b) Encuentre estos puntos Q.

   Sugerencia: Una traslación preserva distancias y si se elige apropiadamente, convierte a Π en un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

4. Sea $f : E \longrightarrow E$ lineal y λ un autovalor de f. Sea $p(u)$ un polinomio $p(u) \in K[u]$. Demuestre que el número $p(\lambda)$ es un autovalor de la función $p(f)$.

5. Considere la matriz

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule el polinomio minimal de R.

   b) Encuentre subespacios S y T de $\mathbb{R}^3$ tales que

      1) $S \oplus T = \mathbb{R}^3$
      2) S y T son estables por R
      3) R es la identidad en S y R es -(identidad) en T.